



永春高中數學科 階級盃答案卷



班級 115 座號 5 姓名 周梓宏 第 60 期第 一 大題

2243

① 已知 $\overline{P_1P_2} = 1+2=3$, $\overline{P_2P_3} = 2+3=5$

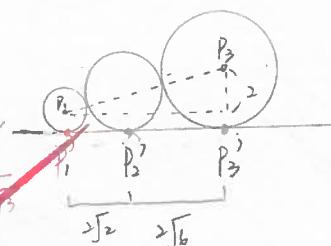
若把圓心都往下貼到x軸上時

$$\overline{P_1'P_2'} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{P_2'P_3'} = \sqrt{5^2 - 1^2} = 2\sqrt{6}$$

$$\overline{P_1'P_3'} = \sqrt{(2\sqrt{2} + 2\sqrt{6})^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 16\sqrt{3}}$$

$$\Omega_3 \text{ 的周長} = 3 + 5 + \sqrt{36 + 16\sqrt{3}} = 8 + \sqrt{36 + 16\sqrt{3}}$$



② 求 Ω_3 面積方法



$$\therefore \Omega_3 \text{ 面積} = \frac{(2\sqrt{2} + 2\sqrt{6}) \times 2}{2} - \left(\frac{(2+1) \cdot 2\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{6} \times 1}{2} \right) = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

$$\therefore \Omega_3 \text{ 的面積} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$$

二、① 已知 $\overline{P_1P_2} = 3$, $\overline{P_2P_3} = 2+3=5$, $\overline{P_3P_4} = 3+4=7$

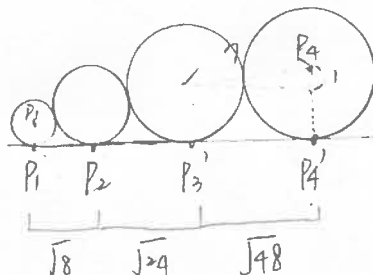
若把圓心都往下貼到x軸上時

$$\overline{P_1'P_2'} = \sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8}$$

$$\overline{P_2'P_3'} = 2\sqrt{6}$$

$$\overline{P_3'P_4'} = \sqrt{7^2 - 1^2} = \sqrt{48}$$

$$\Rightarrow \overline{P_1'P_4'} = \sqrt{(\sqrt{8} + 2\sqrt{6} + \sqrt{48})^2 + 3^2}$$



$$\Rightarrow \overline{P_1P_4} = \sqrt{89 + 16\sqrt{3} + 48\sqrt{2} + 16\sqrt{6}}$$

$$\Omega_4 \text{ 的周長} = 3 + 5 + 7 + \sqrt{89 + 16\sqrt{3} + 48\sqrt{2} + 16\sqrt{6}} = 15 + \sqrt{89 + 16\sqrt{3} + 48\sqrt{2} + 16\sqrt{6}}$$

② 求 Ω_4 面積方法跟求 Ω_3 的一樣

$$\Omega_4 \text{ 面積} = \frac{(2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3}) \times 3}{2} - \frac{(3+2) \cdot 2\sqrt{2}}{2} - \frac{(2+1) \cdot 2\sqrt{6}}{2} - \frac{1 \times \sqrt{48}}{2}$$

$$= 4\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$$

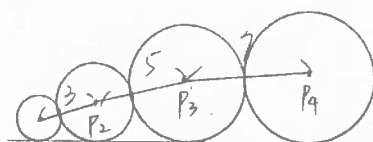
請將本卷對折一次後投入投件箱，謝謝您的參與！



永春高中數學科 階城盃答案卷

班級 115 座號 5 姓名 周梓宏 第 60 期第 一 大題

三①



由左圖可看出隨著圓的半徑變大，圓心與圓心的距離也會變大，且必為等差數列公差為2
證明為何公差為2 = 令 P_n 半徑為 r , P_{n-1} 半徑為 $r-1$

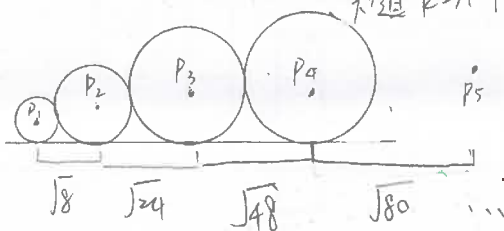
$$P_{n+1} \text{ 半徑為 } r+1 \Rightarrow P_{n+1}P_n - P_nP_{n-1} = r+1 - (r-1) = 2$$

$\therefore$ 有前述規律 3, 5, 7, 9, ...

$$\therefore \text{可列出 } \frac{(a_1 + (k-1)d)k}{2} = \frac{(b + (k-1)d)k}{2} \quad (k \text{ 為項數})$$

$\therefore$ 已知當 $k=1$ 時 $n=2$ $\therefore k$ 與 n 關係式 = $k=n-1$

$\therefore$ 知道 $k=n-1$ $\therefore \frac{(b+(n-2)d)(n-1)}{2}$ 為圓心與圓心之距離總和



$$\text{令 } a_1 = \sqrt{8}, a_2 = \sqrt{24}, a_3 = \sqrt{48}, a_4 = \sqrt{80}$$

$$a_1 = \sqrt{8}$$

$$a_2 = \sqrt{8} \times \sqrt{3} = a_1 \times \sqrt{3} = a_1 \times \sqrt{1+2} = a_1 \times \sqrt{\frac{(1+2) \times 2}{2}}$$

$$a_3 = \sqrt{8} \times \sqrt{6} = a_1 \times \sqrt{6} = a_1 \times \sqrt{1+2+3} = a_1 \times \sqrt{\frac{(1+3) \times 3}{2}}$$

$$a_4 = \sqrt{8} \times \sqrt{10} = a_1 \times \sqrt{10} = a_1 \times \sqrt{1+2+3+4} = a_1 \times \sqrt{\frac{(1+4) \times 4}{2}}$$

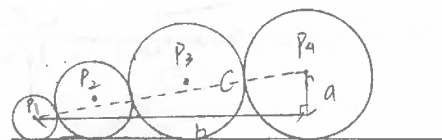
$$\Rightarrow a_t = a_1 \times \sqrt{\frac{(1+t) \times t}{2}} = \sqrt{8} \times \sqrt{\frac{(1+t) \times t}{2}}$$

$\therefore t=n-1 \therefore \sqrt{8} \times \sqrt{\frac{(n-1) \times n}{2}} = a_t$ (指把 n 代入能知道最後一個底是多少)

為了求出所有的底可列出 $\sum_{i=1}^n \sqrt{8} \times \sqrt{\frac{(i-1) \times i}{2}}$

$$\therefore \text{已知底也知高為 } n-1 \therefore P_1P_n = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n \sqrt{8} \times \sqrt{\frac{(i-1) \times i}{2}}\right)^2 + (n-1)^2} \therefore \Omega \text{ 周長} = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{8} \times \sqrt{\frac{(i-1) \times i}{2}}\right) + (n-1) + n-1 + (n-3)$$

為了求出 P_1P_n 的長度，所以我用畢氏定理



$$C = \sqrt{a^2 + b^2}$$

把 $\sqrt{8} \times \sqrt{\frac{(1+t) \times t}{2}}$ 整理過後

把 $\frac{(b+(n-2)d)(n-1)}{2}$ 整理過後

只有 $n-1$ 項

請將本卷對折一次後投入投件箱，謝謝您的參與！

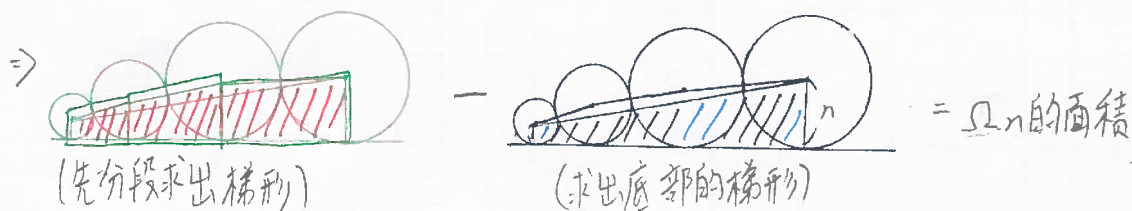


永春高中數學科 階城盃答案卷



班級 115 座號 5 姓名 周梓宏 第 60 期第 一 大題

② 求 Ω_n 面積的方法



$$\sum_{i=1}^n \underbrace{(i + (i-1))}_{\text{上下底}} \times \underbrace{\left(\sqrt{8} \times \sqrt{\frac{(i-1)i}{2}} \right)}_{\text{高}} \times \frac{1}{2} - \underbrace{(n+1)}_{\text{上下底}} \times \underbrace{\sum_{i=1}^n \sqrt{8} \times \sqrt{\frac{(i-1)i}{2}}}_{\text{底的總和 (對梯形來說是它的高)}} \times \frac{1}{2}$$

$\hookrightarrow$ 為了求出所有的梯形

$$= \sum_{i=1}^n (2i-1) \sqrt{i^2 - i} - (n+1) \sum_{i=1}^n \sqrt{i^2 - i} \quad \# (n \geq 3)$$

由上面經整理過後而得

只有 $n-1$ 項, 可合併



永春高中數學科 階城盃答案卷

班級 115 座號 5 姓名 周林宸 第 60 期第 一 大題

11.



$$\Rightarrow \frac{(k+1+k) \times \left(\sqrt{8 \times \frac{k(k+1)}{2}} \right) + (k+2+k+1) \left(\sqrt{8 \times \frac{(k+1)(k+2)}{2}} \right)}{2} - \frac{(k+2+k) \left(\sqrt{8 \times \frac{k(k+1)}{2}} + \sqrt{8 \times \frac{(k+1)(k+2)}{2}} \right)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(2k+1) \sqrt{4k(k+1)}}{2} + \frac{(2k+3) \sqrt{4(k+1)(k+2)}}{2} - \frac{(2k+2) \left(\sqrt{4k(k+1)} + \sqrt{4(k+1)(k+2)} \right)}{2}$$

$$\Rightarrow (2k+1) \sqrt{k(k+1)} + (2k+3) \sqrt{(k+1)(k+2)} - (2k+2) \left(\sqrt{k(k+1)} + \sqrt{(k+1)(k+2)} \right)$$

$$\Rightarrow (2k+1 - (2k+2)) \sqrt{k(k+1)} + ((2k+3) - (2k+2)) \sqrt{(k+1)(k+2)}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{k(k+1)} + \sqrt{(k+1)(k+2)} = \Delta P_k P_{k+1} P_{k+2}$$

$$\Rightarrow -\sqrt{(k+1)(k+2)} + \sqrt{(k+2)(k+3)} = \Delta P_{k+1} P_{k+2} P_{k+3}$$

$$\Delta P_k P_{k+1} P_{k+2} - \Delta P_{k+1} P_{k+2} P_{k+3} = -\sqrt{k(k+1)} + \sqrt{(k+1)(k+2)} + \sqrt{(k+1)(k+2)} - \sqrt{(k+2)(k+3)}$$

> 0 - why?

$$\therefore \Delta P_k P_{k+1} P_{k+2} - \Delta P_{k+1} P_{k+2} P_{k+3} > 0 \therefore \Delta P_k P_{k+1} P_{k+2} > \Delta P_{k+1} P_{k+2} P_{k+3} \#$$

請將本卷對折一次後投入投件箱，謝謝您的參與！