Part 1

永春高中數學科　階城盃答案卷

階城盃 2016

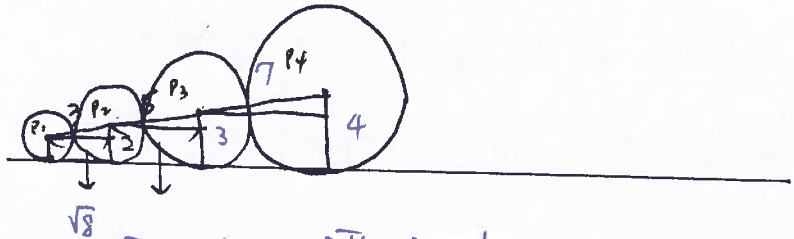
班級 708　座號 34　姓名 蔡和暐　第 60 期第 1 大題

設 Ω_n 的周長為 l_n，面積為 A_n，

good　>153

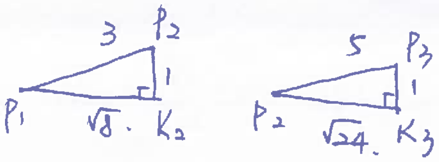
設 通過 P_n 且垂直 L 的直線為 M_n，垂足為 K_n.

(1)



$\overline{P_2K_2}=2-1=1$, $\overline{P_3K_3}=3-2=1$

$\overline{P_1P_2}=3$. $\overline{P_2P_3}=5$. $\overline{P_1K_2}=\sqrt{3^2-1}=\sqrt8$. $\overline{P_2K_3}=\sqrt{5^2-1}=\sqrt{24}$, $d(P_1,M_3)=2$



$l_3 = 3+5+\sqrt{(\sqrt8+\sqrt{24})^2+2^2}$

$= 8+\sqrt{36+16\sqrt3} = 8+2\sqrt{9+4\sqrt3}$ #

$A_3 = \frac{1+2}{2}\times\sqrt8+\frac{2+3}{2}\times\sqrt{24}-\frac{1+3}{2}\times(\sqrt8+\sqrt{24})$. (梯形加減).

$=3\sqrt2+5\sqrt6-4\sqrt2-4\sqrt6=\sqrt6-\sqrt2$ #

(2)　$\overline{P_4K_4}=4-3=1$. $\overline{P_3K_4}=\sqrt{7^2-1}=\sqrt{48}$.

$l_4 = 3+5+7+\sqrt{(\sqrt8+\sqrt{24}+\sqrt{48})^2+3^2} = 15+\sqrt{89+8\sqrt3+16\sqrt6+48\sqrt2}$ #

$A_4 = \frac{1+2}{2}\times\sqrt8+\frac{2+3}{2}\times\sqrt{24}+\frac{3+4}{2}\times\sqrt{48}-\frac{1+4}{2}(\sqrt8+\sqrt{24}+\sqrt{48})$

$=3\sqrt2+5\sqrt6+14\sqrt3-5\sqrt2-5\sqrt6-10\sqrt3=4\sqrt3-2\sqrt2$ #

請將本卷對折一次後投入投件箱，謝謝您的參與！

Part 2

永春高中數學科　階城盃答案卷

班級 308　座號 34　姓名 蔡和晴　第 60 期第 1 大題

(3)

$$l_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left(k+(k+1)\right)+\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{(k+k+1)^2-1}\right)^2+(n-1)^2}$$

$$=2\times\frac{(n-1)n}{2}+n-1+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{4k^2+4k}\right)^2+(n-1)^2$$

不能這樣合併

$$=(n-1)(n+1)+\left[\left(2\times\sqrt{\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{(n-1)n}{2}}\right)^2+(n-1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=(n-1)(n+1)+\left[4\times\frac{(2n+2)\ n(n-1)}{6}+n^2-2n+1\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=n^2-1+\left[\frac{4}{3}(n^3-n)+n^2-2n+1\right]^{\frac{1}{2}}\ \#$$

$$A_n=\sum_{k=1}^{n-1}(k+k+1)\sqrt{(k+k+1)^2-1}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1+n}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{(k+k+1)^2-1}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)\cdot 2\cdot\sqrt{k^2+k}-\frac{1+n}{2}\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\times 2\sqrt{k^2+k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(2k+1)\cdot\sqrt{k^2+k}-(n+1)\cdot\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k^2+k}\ \#$$

可合併

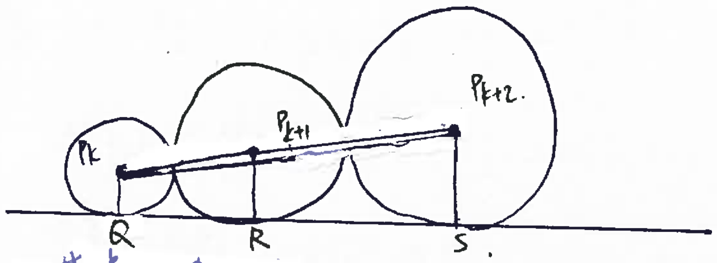
請將本卷對折一次後投入投件箱，謝謝您的參與！

Part 3 !

永春高中數學科 階城盃答案卷

班級 308 座號 34 姓名 蔡和晞 第 60 期第 1 大題

4.



(□為梯形)

考慮面積，$\triangle P_kP_{k+1}P_{k+2} = \square P_kP_{k+1}RQ + \square P_{k+1}P_{k+2}SR - \square P_kQSP_{k+2}$

$d(P_k, \overline{P_{k+1}R}) = \sqrt{(k+k+1)^2-1} = 2\sqrt{k^2+1}$.

$d(P_{k+1}, \overline{P_{k+2}S}) = \sqrt{(k+1+k+2)^2-1} = 2\sqrt{k^2+3k+2}$.

$d(P_k, \overline{P_{k+2}S}) = 2\left(\sqrt{k^2+1} + \sqrt{k^2+3k+2}\right)$

$\therefore$ area of $\triangle P_kP_{k+1}P_{k+2} = \dfrac{(k+k+1)\cdot 2\sqrt{k^2+1}}{2} + \dfrac{(k+1+k+2)\cdot 2\sqrt{k^2+3k+2}}{2}$

$- \dfrac{(k+k+2)\cdot 2\left(\sqrt{k^2+1}+\sqrt{k^2+3k+2}\right)}{2}$

$= (2k+1)(\sqrt{k^2+1}) + (2k+3)(\sqrt{k^2+3k+2}) - (2k+2)(\sqrt{k^2+1} + \sqrt{k^2+3k+2})$

good

$\therefore$ area of $\triangle P_{k+1}P_{k+2}P_{k+3} = (2(k+1)+1)(\sqrt{(k+1)^2+1}) + (2(k+1)+3)(\sqrt{(k+1)^2+3(k+1)+2}$

$- (2(k+1)+2)(\sqrt{(k+1)^2+1} + \sqrt{(k+1)^2+3(k+1)+2})$

請將本卷對折一次後投入投件箱，謝謝您的參與！

Part 4

永春高中數學科　階城盃答案卷

班級 208 座號 24 姓名 蔡和曄 第 60 期第 1 大題

$= (2k+3)\times\sqrt{k^2+3k+2} + (2k+5)\times\sqrt{k^2+5k+6} - (2k+4)\left(\sqrt{k^2+3k+2}+\sqrt{k^2+5k+6}\right)$

當 $k=1$ 時，$\triangle P_kP_{k+1}P_{k+2}$ 即 $\triangle P_1P_2P_3$，

$\triangle P_1P_2P_3$ 面積 $= 3\sqrt{2}+5\sqrt{6}-4(\sqrt{2}+\sqrt{6}) = \sqrt{6}-\sqrt{2} \doteqdot 1.03$

$\triangle P_2P_3P_4$ 面積 $= 5\sqrt{5}+7\sqrt{12}-6(\sqrt{5}+\sqrt{12}) = \sqrt{12}-\sqrt{5} \doteqdot 1.23$

直觀地，area of $\triangle P_{k+1}P_{k+2}P_{k+3}$ > area of $\triangle P_kP_{k+1}P_{k+2}$ #

（可用數學歸納法證明）

how?