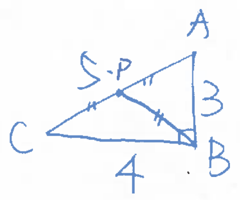
永春高中數學科　階城盃答案卷

P.1

班級 308　座號 34　姓名 蔡和喆　第 57 期第 2. 大題

最佳解!

1.



滿足 $5^2=3^2+4^2$ ∴ $\angle ABC=90°$

P位於 $\overline{AC}$ 之中點. ∴ $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\frac{\overline{AC}}{2}=\frac{5}{2}$.

$S=\left(\frac{5}{2}\right)^2\times 3=\frac{25}{4}$, △ABC面 $=\frac{1}{2}\times4\times3=6$.

∴ $r=\frac{\frac{25}{4}}{6}=\frac{25}{8}$ #

2.

設 $P(x,y)$.

$s=x^2+y^2+(x-8)^2+(y-15)^2+(x-12)^2+(y-5)^2$

$=3x^2+3y^2-40x-40y+458$

$=3\left(x-\frac{20}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{20}{3}\right)^2+\frac{574}{3}$,

當 $P\left(\frac{20}{3},\frac{20}{3}\right)$ 時. s有 $\min=\frac{574}{3}$.

△ABC面 $=\frac{1}{2}\times\left|\begin{matrix}8 & 15\\ 12 & 5\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\times140=70$.

$r_{min}=\frac{S_{min}}{70}=\frac{\frac{574}{3}}{70}=\frac{41}{15}$ #

3. 設 $A(a,b)$. $B(c,d)$. $C(e,f)$. $P(x,y)$. 則

$\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(x-c)^2+(y-d)^2+(x-e)^2+(y-f)^2$

展開配方 $=3\left(x-\frac{(a+c+e)}{3}\right)^2+3\left(y-\frac{(b+d+f)}{3}\right)^2+a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2-\frac{(a+c+e)^2+(b+d+f)^2}{3}$

∴ $x=\frac{a+c+e}{3}$, $y=\frac{b+d+f}{3}$ 時. $\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$ 有 min, 即P為三角形重心G.

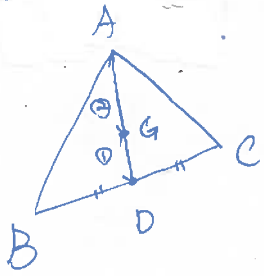
請將本卷對折一次後投入投件箱，謝謝您的參與！

永春高中數學科　階城盃答案卷

P.2 !

班級 308　座號 34　姓名 蔡和曄　第 57 期第 2 大題

$\Rightarrow \overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2$　又 $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD} \Rightarrow \overline{AG}^2=\frac{4}{9}\overline{AD}^2$.



By 中線定理.

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{BD}^2)=2(\overline{AD}^2+\frac{1}{4}\overline{BC}^2).$$

$$\Rightarrow \overline{AD}^2=\frac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2)-\frac{1}{4}\overline{BC}^2=\frac{1}{2}(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\frac{1}{2}\overline{BC}^2).$$

$$\therefore \overline{AG}^2=\frac{\cancel{4}\,2}{9}\times\frac{1}{\cancel{2}\,1}\times(\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-\frac{1}{2}\overline{BC}^2).$$

$$=\frac{2}{9}\overline{AB}^2+\frac{2}{9}\overline{AC}^2-\frac{1}{9}\overline{BC}^2 \text{ —— ①}.$$

同理. $\overline{BG}^2=\frac{2}{9}\overline{BA}^2+\frac{2}{9}\overline{BC}^2-\frac{1}{9}\overline{AC}^2$ —— ②

$\overline{CG}^2=\frac{2}{9}\overline{CA}^2+\frac{2}{9}\overline{CB}^2-\frac{1}{9}\overline{AB}^2$ —— ③.

①+②+③ $\Rightarrow \overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2=\frac{1}{3}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2)$

$\therefore S=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\frac{1}{3}(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{AC}^2)$.

設 $\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{AC}=b$.　$\therefore S=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)$. By 海龍公式,

$\triangle ABC$面 $=\sqrt{\frac{a+b+c}{2}\times\frac{-a+b+c}{2}\times\frac{a-b+c}{2}\times\frac{a+b-c}{2}}$

化簡 $=\frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)}$.

請將本卷對折一次後投入投件箱，謝謝您的參與！

P.3.

永春高中數學科　階城盃答案卷

班級 308　座號 34　姓名 蔡和曄　第 5 期第 2 大題

$$r=\frac{\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)}{\frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)-(a^4+b^4+c^4)}}=\frac{4}{3}\sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}}$$

其中 $(a^2+b^2+c^2)^2>(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)$.

故 $\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}>1$.

故 $r=\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}}>\dfrac{4}{3}>1$.

$\therefore$ r 不可能 <1.

4. 由 3. 可知 $r_{min}=\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a^2+b^2+c^2)^2-2(a^4+b^4+c^4)}}$

此時 P 為 $\triangle ABC$ 的重心 G.