



# 永春高中數學科 階城盃答案卷

班級 315 座號 1 姓名 陳羽菱 第 55 期第 一 大題

令  $f_n(a_1, a_2, \dots, a_t)$  為符合「有  $b$  位男生和  $n$  位女生排成一列時，

將男生分為  $t$  組，各有  $a_1, a_2, \dots, a_t$  人相鄰，且兩組間至少有一位女生，的排法數。  
令  $Sum_n$  為有  $n$  位女生時，符合規定的總排法數

$n=0$

沒有女生時男生必為  $b$  人一組

$$Sum_0 = C_3^3 + C_2^2 - C_1^1 = 1$$

$$f_0(b) = C_0^0 = 1 \quad \checkmark$$

$$Sum_0 = 1$$

$$P_0 = \frac{1}{1} = 1$$

$n=1$

有 1 位女生時，男生符合規定的分法有 (6), (2,4), (3,3) 三種

$$f_1(b) = C_1^1 \quad \checkmark$$

$$Sum_1 = C_3^4 + C_2^3 - C_1^2 = 4 + 3 - 2 = 5$$

$$f_1(2,4) = (C_1^1 C_0^0) \times 2 \quad \checkmark$$

$$f_1(3,3) = C_1^1 C_0^0 \quad (2,4) \text{ 和 } (4,2)$$

$$Sum_1 = 5$$

$$P_1 = \frac{4}{5}$$

$n=2$

有 2 位以上的女生時，男生符合規定的分法有 (6), (2,4), (3,3), (2,2,2) 四種

$$f_2(b) = C_2^2 \quad \checkmark$$

$$Sum_2 = C_3^5 + C_2^4 - C_1^3 = 10 + 6 - 3 = 13$$

$$f_2(2,4) = (C_1^1 C_2^2 + C_2^2 C_1^1) \times 2 \quad \checkmark$$

$$f_2(3,3) = C_1^1 C_2^2 + C_2^2 C_1^1$$

$$f_2(2,2,2) = C_2^2 C_1^1$$

$$Sum_2 = 13$$

$$P_2 = \frac{9}{13}$$

$n=3$

$$f_3(b) = C_3^3 \quad \checkmark$$

$$Sum_3 = C_3^6 + C_2^5 - C_1^4 = 20 + 10 - 4 = 26$$

$$f_3(2,4) = (C_1^1 C_3^3 + C_2^2 C_1^1 + C_3^3 C_2^2) \times 2 \quad \checkmark = 26$$

$$f_3(3,3) = C_1^1 C_3^3 + C_2^2 C_1^1 + C_3^3 C_2^2$$

$$f_3(2,2,2) = C_2^2 C_1^1 + C_1^1 C_2^2$$

$$Sum_3 = 26$$

$$P_3 = \frac{16}{26} = \frac{8}{13}$$

$n=4$

$$f_4(b) = C_4^4 \quad \checkmark$$

$$Sum_4 = C_3^8 + C_2^7 - C_1^6 = 35 + 15 - 5 = 45$$

$$f_4(2,4) = (C_1^1 C_4^4 + C_2^2 C_1^1 + C_3^3 C_2^2) \times 2 \quad \checkmark = 45$$

$$f_4(3,3) = C_1^1 C_4^4 + C_2^2 C_1^1 + C_3^3 C_2^2$$

$$f_4(2,2,2) = C_2^2 C_1^1 + C_1^1 C_2^2 + C_4^4 C_3^3$$

$$Sum_4 = 45$$

$$P_4 = \frac{25}{45}$$

方法數說明：

$n=5$

$$f(6) = C_5^6 \quad \checkmark \leftarrow \text{5 女和 6 男} \text{ 的排法數}$$

$$f(2,4) = (C_1^1 C_5^5 + C_2^2 C_1^1 + C_3^3 C_2^2) \times 2 \quad \checkmark \leftarrow \text{5 女和 4 男} \text{ 的排法數}$$

5 女在男生中間，4 個空隙取 2 個

5 女分 2 組在男生左、中、右

4 個空隙取 1 個

$$f(3,3) = C_1^1 C_5^5 + C_2^2 C_1^1 + C_3^3 C_2^2 \quad (\text{同 } f(6))$$

$$f(2,2,2) = C_2^2 C_1^1 + C_1^1 C_2^2 + C_4^4 C_3^3$$

5 女在男生中間，4 個空隙取 1 個

5 女分 4 組，除中間 2 組外，另 2 組在最左、右

$$Sum_5 = C_3^8 + C_2^7 - C_1^6 = 36 + 15 - 6 = 45$$

$$Sum_5 = 45 \quad P_5 = \frac{36}{45}$$

請將本卷對折一次後投入投件箱，謝謝您的參與！



班級 315 座號 1 姓名 陳羽廷 第 55 期第 一 大題

(3) 由前面「方法數說明」之邏輯，我們可以推得：

「符合規定的排法中，有出現至少 4 位男生相鄰的排法有  $f_n(b) + f_n(2,4)$  種，

$$\begin{aligned} f_n(b) + f_n(2,4) &= C_1^{n+1} + 2(C_1^1 C_n^n + C_1^2 C_1^{n-1} + C_1^3 C_2^{n-2}) \\ &= n+1 + 2\left(1 + n-2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\right) \\ &= n+1 + 2 + 4n - 4 + n^2 - 3n + 2 \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2 \end{aligned}$$

(4) 計算「符合規定的排法」之總數時，我們可將男生分為 2, 2, 2 一組或 3, 3 一組

$$\begin{aligned} \text{則 Sum} &= \frac{(3+n)!}{3! n!} + \frac{(2+n)!}{2! n!} - \frac{(1+n)!}{1! n!} \\ &= C_3^{n+3} + C_2^{n+2} - C_1^{n+1} \\ &= \frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!} + \frac{(n+2)(n+1)}{2!} - \frac{(n+1)}{1!} \\ &= \frac{(n^2 + 5n + 6 + 2n + 2 - b)(n+1)}{6} \\ &= \frac{(n^2 + 8n + 6)(n+1)}{6} \end{aligned}$$

$$(5) \quad P_n = \frac{6(n+1)^2}{(n^2 + 8n + 6)(n+1)} \leq \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow \frac{6n^2 + 12n + 6}{n^3 + 9n^2 + 14n + 6} \leq \frac{1}{100}$$

$$\Rightarrow 600n^2 + 1200n + 600 \leq n^3 + 9n^2 + 14n + 6$$

$$\Rightarrow n^3 - 591n^2 - 1186n - 594 \geq 0$$

$$\Rightarrow n \geq 593.19$$

$$\Rightarrow \text{取 } n = 594$$

$$\Rightarrow \min(k) = 594 \quad \#$$

*excellent*

