



永春高中數學科 階城盃答案卷

班級 315 座號 1 姓名 陳羽廷 第 54 期第 1 大題

0 $S_1 = 0$
1 1 $S_2 = 2$
2 2 2 $S_3 = 6$
3 4 4 3 $S_4 = 14$
4 7 8 7 4 $S_5 = 30$
5 11 15 15 11 5 $S_6 = 62$
6 16 26 30 26 16 6 $S_7 = 126$
7 22 42 56 56 42 22 7 $S_8 = 254$

(1) 由第1列的數字加總可得 $S_7 = 126$
且可發現 $S_{n+1} = 2S_n + 2$

第 n 列
第 $n+1$ 列
計算 S_{n+1} 時，第 n 列的 $\odot$ 皆會被算到 2 次，
兩旁的 $\square$ 各被算到一次，最後加上第 $n+1$ 列的 $\triangleright$ 個 n
因此 $S_{n+1} = 2(S_n - (n-1)) + 2(n-1) + n = 2S_n + 2$

(2) 方法一
 $S_{n+1} = 2S_n + 2 = 2(S_n + 1) - 2$

$\Rightarrow S_{n+1} + 2 = 2(S_n + 2)$

$S_1 + 2 = 0 + 2$

$S_2 + 2 = 2(S_1 + 2)$

$S_3 + 2 = 2(S_2 + 2)$

$S_4 + 2 = 2(S_3 + 2)$

$\vdots$

$\times) S_n + 2 = 2(S_{n-1} + 2)$

$S_n + 2 = 2^n$

$\Rightarrow S_n = 2^n - 2$ #

證明 $S_n = 2^n - 2$

設 $n=k$ 時原式成立，即 $S_k = 2^k - 2$

則當 $n=k+1$ 時， $S_{k+1} = 2S_k + 2$

$= 2(2^k - 2) + 2$

$= 2^{k+1} - 2$ 原式成立

② 當 $n=1$ 時， $S_1 = 2^1 - 2 = 0$ 原式成立

由①、②及 M.I. 可證 $S_n = 2^n - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ #

方法三

巴斯卡三角形

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

令第 n 列之數字和為 S_n^B

$S_n^B = \sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n$

將此題的數值三角和巴斯卡三角形比對，
從第 3 列開始，第 n 層最左及最右側的數值多了 $n-1$ 。

這些數從第 n 列開始，影響下面的「子巴斯卡三角形」。

分別以 第 3 列左側的 $2=1+1$ 為例，
第 4 列： $3=1+1+1$ 為例。

其造成的影響如右圖橘色及綠色部分
同理，右側的影響亦相同



由上述概念及巴斯卡三角形 $S_n^B = 2^n$ 可推得

$S_3 = S_3^B + 2(2^0)$, $S_4 = S_4^B + 2(2^1 + 2^0)$, $S_n = S_n^B + 2(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^0)$

$n \geq 3$ 時 $S_n = 2^n + 2 \sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n + 2 \times (2^n - 1) = 2^{n+1} - 2 = 2^n - 2$

$n=1$ 時 $S_1 = 0 = 2^1 - 2$, $n=2$ 時 $S_2 = 1+1 = 2^2 - 2$ 綜合上述可知 $S_n = 2^n - 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ #

請將本卷對折一次後投入投件箱，謝謝您的參與！



永春高中數學科 階城盃答案卷



班級 315 座號 1 姓名 陳羽廷 第 54 期第 一 大題

(14)

$$\begin{array}{l} a \\ a+d \quad a+d \quad s_1 = a \\ a+d \quad 2a+d \quad a+d \quad s_2 = 2a+d \\ a+d \quad 3a+d \quad 2a+d \quad a+d \quad s_3 = 4a+6d \\ a+d \quad 4a+d \quad 3a+d \quad a+d \quad s_4 = 8a+14d \\ a+d \quad 5a+d \quad 4a+d \quad 3a+d \quad a+d \quad s_5 = 16a+30d \end{array}$$

由觀察及(1)的方法可知 $S_{n+1} = 2S_n + d$

同(1)的方法可得 $S_n = 2^{n-1}a + (2^n - 2)d$

+3

方法一 $S_{n+1} = 2S_n + d = 2(S_n + d) - d$ 方法二 斜邊改為 $a, a+d, a+d, \dots$

$$\Rightarrow S_{n+1} + 2d = 2(S_n + d)$$

$$\begin{array}{l} S_1 + 2d = a + 2d \\ S_2 + 2d = 2(S_1 + d) \\ S_3 + 2d = 2(S_2 + d) \\ S_4 + 2d = 2(S_3 + d) \\ \vdots \end{array}$$

$$\times) S_n + 2d = 2(S_{n-1} + d)$$

$$S_n + 2d = 2^{n-1}(a + 2d)$$

$$\Rightarrow S_n = 2^{n-1}a + (2^n - 2)d \quad \#$$

則原巴斯卡三角形的每個數值都 $\times a$ ，
且每個「子巴斯卡三角形」的數值都 $\times d$

$$\begin{aligned} \text{得 } S_n &= aS_n^0 + d \times (2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^0) \\ &= 2^{n-1}a + 2(2^{n-1} - 1)d \\ &= 2^{n-1}a + (2^n - 2)d \quad \# \end{aligned}$$

$n-1$: 從第2列開始
比 a 倍的巴斯卡
三角形之數值多 d

證明 $S_n = 2^{n-1}a + (2^n - 2)d$

設 $n=k$ 時原式成立，即 $S_k = 2^{k-1}a + (2^k - 2)d$

$$\begin{aligned} \text{則 } n=k+1 \text{ 時, } S_{k+1} &= 2S_k + d \\ &= 2^k a + 2^{k+1} d - 4d + 2d \\ &= 2^{(k+1)-1} a + (2^{k+1} - 2)d \quad \text{原式成立} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{①當 } n=1 \text{ 時, } S_1 &= 2^{1-1}a + (2^1 - 2)d \\ &= 2^0 a + 0 \times d = a \quad \text{原式成立} \end{aligned}$$

由①及M.I.可證 $S_n = 2^{n-1}a + (2^n - 2)d \quad \forall n \in \mathbb{N}$ #

(15) 對 mod 1000 而言

$$\begin{aligned} 2^{2023} - 2 &\equiv (2^{53})^{38} \times 2^9 - 2 \\ &\equiv (-8)^{38} \times 2^9 - 2 \\ &\equiv 2^{114} \times 2^9 - 2 \\ &\equiv (2^{53})^2 \times 2^{11} - 2 \\ &\equiv (-8)^2 \times 2^{11} - 2 \\ &\equiv (2^4)^2 \times 2^3 - 2 \\ &\equiv 608 - 2 \\ &\equiv 606 \quad \# \end{aligned}$$

how do you know $2^{53} \equiv -8 \pmod{1000}$

這裡也省略了不該省略的步驟

請將本卷對折一次後投入投件箱，謝謝您的參與！