



永春高中數學科 階城盃答案卷



班級 315 座號 1 姓名 陳羽蓮 第 53 期第 一 大題

3

(以下以 0 表示正面, X 表示反面)

(1) 先試著列出所有情況

$n=1$ 1個0: 0

0個0: 1

$n=2$ 2個0: 00

1個0: 0X, X0

0個0: XX 不合

$n=3$ 3個0: 000

2: 00X, 0X0, X00

1: X0X

$n=4$ 4個0: 0000

3: 000X, 00X0, 0X00, X000

2: 0X0X, X00X, X0X0

1: 不合

$f(1)=2, f(2)=3, f(3)=5, f(4)=8$

依題意, 我們可以看成 0X...X0 中, 無「XX」出現的排列方法

以 $n=4$ 為例, 0 可能出現 4 次, 3 次和 2 次

0 出現 2 次: $\overset{\wedge}{0} \overset{\wedge}{0} \overset{\wedge}{} \overset{\wedge}{}$ X 可插在 3 個橘色箭號的任 2 個位置 $\Rightarrow$ 有 $C_3^2 = 3$ 種方法

3 次: $\overset{\wedge}{0} \overset{\wedge}{0} \overset{\wedge}{0} \overset{\wedge}{}$: 4 : 1 : $\Rightarrow C_3^1 = 4$ 種 :

4 次: $\overset{\wedge}{0} \overset{\wedge}{0} \overset{\wedge}{0} \overset{\wedge}{0}$: 5 : 0 : $\Rightarrow C_3^0 = 1$ 種 :

因此 $f(1) = C_0^0 + C_1^1 = 2, f(2) = C_0^0 + C_1^1 = 3, f(3) = C_0^0 + C_1^1 + C_2^2 = 5, f(4) = C_0^0 + C_1^1 + C_2^2 = 8$ #

由上可知 $f(n)$ 的通解為: $f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1-i}^{n-1-i}$

3

(2) $p(n) = \frac{f(n)}{2^n}$ 擲一次有 2 種可能, 擲 n 次有 2^n 種可能

$p(1) = \frac{2}{2} = 1, p(2) = \frac{3}{4}, p(3) = \frac{5}{8}, p(4) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ #

5

(3)

$\square$ 有 0, X 兩種可能

若為 0: $\overset{0}{\square} \text{ --- } f(n-1)$ 種
若為 X: $\overset{X}{\square} \text{ --- } f(n-2)$ 種

$\Rightarrow$ 可知 $f(n+2) = f(n) + f(n+1), n \in \mathbb{N}_+$
 $f(1) = 2 \wedge f(2) = 3$ #

4

(4)

由 (1) 可得

$f(n) = \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1-i}^{n-1-i}$

$\Rightarrow f(10) = C_0^0 + C_1^1 + C_2^2 + C_3^3 + C_4^4 + C_5^5 + C_6^6 + C_7^7 + C_8^8 + C_9^9$
 $= 1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6 + 144$ #

$p(10) = \frac{f(10)}{2^{10}} = \frac{144}{1024} = \frac{9}{64}$ #

請將本卷對折一次後投入投件箱, 謝謝您的參與!